SUL LIBRO V DI EUCLIDE

NOTA

di G. PEANO (Torino)

La Commissione Reale per la riforma della Scuola media si indirizza agli Insegnanti con una serie di profonde osservazioni didattiche, e con un ampio questionario. Il « Bollettino di Matematica » pubblicò nel n. 3-4, la parte del questionario relativo alla Matematica, e apre le sue colonne alla discussione. Accettando il gentile invito del Direttore del Bollettino, tratterò della questione che porta il n. 10, così enunciata:

« Che pensate della maggiore e minore convenienza di seguire, « nella trattazione delle proporzioni, il metodo del V libro di « Euclide? ».

Esaminiamo quali *verità* Euclide afferma e dimostra nel libro V. La proposizione 1 è così tradotta dal Betti e Brioschi:

« Se quante grandezze si vogliano siano equimoltiplici di « altrettante grandezze, ciascuna di ciascuna, quante volte una « è moltiplice della sua corrispondente, tante volte la somma « delle prime sarà moltiplice della somma delle seconde ».

Questa è una versione di parole greche in parole italiane; non è una versione di concetti. L'allievo, cui si vuol proporre lo studio del V libro di Euclide, già conosce i simboli, così detti algebrici, $= + \times$, e l'uso delle lettere, La versione d'Euclide ad uso degli allievi deve esprimere le idee del primo sotto

quella fra le forme note ai discenti, che è la più chiara. Perciò *continuando* la versione della proposizione 1, coll'introdurre questi simboli, essa diventa:

« Se a, b, c, d sono grandezze, ed m è un numero naturale, e se $c = ma$, $d = mb$, sarà $c + d = m(a+b)$ ».

Le lettere c e d si possono eliminare, e si ha:

« Se a, b sono grandezze, ed m è un numero naturale, sarà $ma + mb = m(a+b)$ ».

Infine introduco i simboli della Logica-Matematica:

Q = quantità o grandezza,

N = numero naturale,

ε = è, sono,

$\supset$ = si deduce,

e i punti di divisione. La proposizione è tradotta in:

PROPOSIZIONE 1.

$$a, b \varepsilon Q \cdot m \varepsilon N \cdot \supset \cdot m(a+b) = ma + mb,$$

esprimente un caso della proprietà distributiva di $\times$ rispetto a $+$.

Passiamo a tradurre la proposizione 2:

« Se la prima grandezza sia molteplice della seconda come « la terza della quarta, e la quinta sia moltiplice della seconda « come la sesta della quarta; saranno anche la prima e la quinta « insieme moltiplici della seconda, come la terza e la sesta « insieme sono moltiplîci della quarta ».

Chiamiamo a, b, c, d, e, f le grandezze prima, seconda,... sesta, m il « come la prima grandezza è moltiplice della seconda », e n la ragione della quinta alla seconda. La proposizione viene tradotta in:

$$a, b, c, d, e, f \varepsilon Q \cdot m, n \varepsilon N \cdot a = mb \cdot c = md \cdot e = nb \cdot f = nd \cdot \supset \cdot a+e = \\ = (m+n)b \cdot c+f = (m+n)d.$$

Elimino le lettere a, c, e, f, sostituendole coi secondi membri delle equazioni in cui esse figurano:

$$b, d \varepsilon Q \cdot m, n \varepsilon N \cdot \supset \cdot mb + nb = (m+n)b \cdot md + nd = (m+n)d.$$

Essa afferma due volte la stessa proprietà:

$$a \varepsilon Q \cdot m, n \varepsilon N \cdot \supset \cdot ma + na = (m+n)a$$

altro caso della proprietà distributiva di $\times$ rispetto a $+$.

L'analoga versione della Proposizione 3 è:

$$a \varepsilon Q \cdot m, n \varepsilon N \cdot \supset \cdot m(na) = (mn)a,$$

proprietà associativa del segno $\times$.

Le singole proposizioni del V libro d'Euclide sono tradotte in simboli nel « Mathesis » diretto dal prof. Mansion, a. 1890, t. X, p. 73. Quelle dei libri VII, VIII, IX, X sono tradotte in « Rivista di Matematica » tomo 1 a. 1891, pag. 10-12, e tomo 2, a 1892 pag. 7-10.

Questi libri, che Euclide chiama Aritmetica, costituiscono in sostanza il corso di Algebra dei Licei e Istituti tecnici, compresa la trasformazione di $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, oggetto principale del libro X. I trattati scientifici dovrebbero, d'ogni proposizione, citare il nome dell'autore. Così è fatto nel Formulario Mathematico per l'Algebra (Tomo V pag. 95, 96, 109), e in alcuni libri didattici.

Così risulta che l'Algebra elementare è dovuta in gran parte ad Euclide; fu completata da Diophanto; e vi portarono poche aggiunte gli Indiani, gli Arabi, e gli Europei della nostra civiltà, ai quali spettano i complementi e la continuazione dell'Algebra.

La questione proposta dalla Commissione reale, pertanto significa:

« Oltre ad esporre l'Algebra, col linguaggio algebrico moderno,
« dobbiamo noi ancora esporre le proprietà fondamentali dei
« segni +, —, ×, /, col linguaggio d'Euclide? »

Se si avesse molto tempo disponibile, si potrebbe rispondere affermativamente. Allora conviene porre fra le mani Euclide autentico nell'originale greco, accompagnando ogni proposizione della sua versione completa nel linguaggio algebrico equivalente. In tal modo si fa la storia del linguaggio matematico; e risulta evidente il suo perfezionamento in 2000 anni, e l'enorme semplificazione apportata dall'uso dei simboli. Invece l'uso d'una semplice versione letteraria del libro V porta molti allievi a ritenere che la scienza ivi svolta sia cosa diversa dai fondamenti del calcolo algebrico.

Ma dato il difetto di tempo, per gli allievi delle scuole medie, data la mole di cose più utili a impararsi, e più igieniche a farsi, questo studio storico-comparato si può rimandare al quinto anno del corso di Matematica pura.

La coesistenza, nella scienza Matematica, di due o più linguaggi, che esprimono la stessa cosa, coll'apparenza di cose diverse, si presenta in varie questioni.

Una trentina d'anni fa era comune una doppia teoria dei logaritmi, l'una cogli esponenziali, l'altra colle progressioni. Lo stesso ente era indicato in una teoria colla notazione cartesiana a^m, e nell'altra teoria colla versione letterale della frase costante in Euclide « l'm^o termine della progressione geometrica di ragione a, e col primo termine 1 » (libro IX, prop. 8, ecc.).

Spesso si dice che esistono più teorie degli irrazionali, o più modi di introdurli. Analizzando i varii modi proposti, ed esprimendoli in simboli di Logica-Matematica, come è fatto nella *RdM.* t. 6 pag. 126-140, in modo che ogni idea risulti espressa da un sol simbolo, indipendente dalle varie forme di linguaggio, risulta che questi modi coincidono fra loro. La loro differenza è solo linguistica.

Con triplice linguaggio si esprimono le stesse proposizioni, in una parte di Geometria elementare, in Trigonometria, e nella teoria degli esponenziali imaginarii. Le formule di Eulero permettono di sviluppare così facilmente le proposizioni di trigonometria, che lo studio di questa scienza, quale si fa nelle scuole medie, non dà vantaggio all'insegnamento successivo.

Le varie Geometrie sono un altro esempio di linguaggi diversi per esprimere le stesse idee.

Il linguaggio matematico italiano, come tutto il linguaggio scientifico, ci è comune coi Francesi, Inglesi, Tedeschi e Russi, e va trasformandosi continuamente. Considerato a alcuni secoli di distanza, fa apparire diverse le teorie identiche. Ma esso varia in modo sensibile in pochi anni. Quando un insegnante si serve di risultati sviluppati da altro insegnante, il linguaggio del primo sarà o più antico o più moderno di quello del secondo.

Questa variazione basta perchè gli allievi non riconoscano le proposizioni studiate, richiamate sotto altra forma. Perciò ritengo opportuno che ogni insegnante faccia il suo corso completo, col richiamare in principio le cognizioni necessarie, e col terminare colle applicazioni pratiche delle teorie spiegate. Si astenga dal dire che la tal teoria che egli spiega, sarà utile agli allievi nei corsi successivi; poichè probabilmente essa o non verrà più richiamata, o verrà richiamata sotto forma diversa ed irreconoscibile agli allievi.